2°/ On appelle g la restriction de f à $\mathbf{R}_+$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie dans $]1,2]$

b) Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à $]1,2]$.

c) Tracer la courbe (C ′) de g^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°/ Soit φ la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $\varphi(x)=\int_0^{\text{tg}\,x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et que $\varphi'(x)=\text{tg}^2x+2$.

b) Calculer alors $\varphi(x)$.

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=1$ et $y=1$.

Exercice 9 :

Soit n $\in$ IN et $U_n=\int_0^1 x^n.\sqrt{1-x^2}\,dx$

1°/a) Montrer que pour tout n $\in$ IN : $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2°/Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout n $\in$ IN on a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}U_n$

3°/ Soit x $\in$ IR et $\Phi(t)=\int_0^{\cos t}\sqrt{1-x^2}\,dx$

a) Montrer que Φ est dérivable sur IR.

b) Calculer $\Phi'(t)$.

c) En déduire $\Phi(t)$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Calculer alors U_0.

4°/ a) Montrer que pour tout n $\in$ IN on a : $\frac{n+1}{n+4} \le \frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

c) Montrer que pour tout n $\in$ IN on a :

$$U_n.U_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

d) Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\,U_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$